Βιβλιογραφία:

- M. Curtis. Matrix groups
- A. Baker. An introduction to matrix groups
- R. Howe. Very basic Lie Theory (American Monthly 90, 1983)

$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \underset{\delta.x}{\cong} \mathbb{R}^4$

$\mathbb{H}$ διαιρετικός δακτύλιος

(i, j, k) $i \in \mathbb{C}$

$\longrightarrow +$ (θετικός προσανατολισμός)

$\longleftarrow$ (αρνητικός προσανατολισμός)

$ij = k$, $ji = -k$

$jk = i$, $kj = -i$

$ki = j$, $ik = -j$

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Μπορώ να πάρω τα καρτεσιανά γινόμενα αυτών, για να φτιάξω δ.χ.

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$

$(\mathbb{K}^n, +)$: $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

- $\forall c \in \mathbb{K}$ ορίζουμε $c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n) \neq (x_1, \dots, ~~x_n)c~~$

Επομένως $\mathbb{K}^n$ με σημειακό γινόμενο

$\mathbb{K}^n$ γίνεται διανυσματικός χώρος, παρόλο το $\mathbb{K}$ δεν είναι πάντα σώμα.

Ορισμός

- Μια απεικόνιση $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ θα καλείται γραμμική, αν ισχύει $\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v)$ για $a, b \in \mathbb{K}$ και $u, v \in \mathbb{K}^n$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Αν $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ και $\psi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ είναι γραμμικές, τότε και η σύνθεση $\varphi \cdot \psi$ ή $\varphi \circ \psi$ είναι επίσης γραμμική απεικόνιση.

ΒΑΣΕΙΣ

Σαν βάση για τον $\mathbb{K}^n$ θα θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

Αν δοθεί μια γραμμική απεικόνιση $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, μπορούμε να την αντιστοιχίσουμε με κάποιον πίνακα.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

$M_n(\mathbb{K}) = \{n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{K}\}$.

- Πρόσθεση πινάκων: $A = (a_{i,j})$ και $B = (b_{i,j})$

$A + B = (c_{ij})$ με $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$M_n(\mathbb{K})$ με την πρόσθεση γίνεται αβελιανή ομάδα

- Γινόμενο

→ Σημειακό γινόμενο. $cA = c(a_{i,j}) = (ca_{i,j})$

→ Γινόμενο πινάκων: $AB = (a_{i,j})(b_{i,j}) = c_{i,j}$

όπου $c_{i,j} = \sum_{t=1}^{n} a_{i,t} \cdot b_{t,j}$

$M_n(\mathbb{K})$ με τις δυο πράξεις πρόσθεση και σημειακό γινόμενο, γίνεται διανυσματικός χώρος.

Πρόταση

Έστω $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας A που αντιστοιχεί στην φ ως προς την κανονική βάση έχει σαν γραμμές τα στοιχεία $\varphi(e_i)$, δηλαδή αυτή θα είναι η i-γραμμή.

Γνωρίζουμε ότι αν δοθεί ένας πίνακας A, ορίζεται γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα

$A \in M_1(\mathbb{K})$ και $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

$A: \mathbb{K}^1 \to \mathbb{K}^1$ $\quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$ γραμμική απεικόνιση.

- $A(au+bv) = aA(u) + bA(v)$

$A = (i)$ $\quad A(j1)$

στοιχείο του $\mathbb{K}$ $\quad j$, 1 βάση του $\mathbb{K}$

Άρα $A(j1) = i \cdot j\, 1 = k \cdot 1$

$\neq$

$jA(1) = j \cdot i1 = -k \cdot 1$

- $(au+bv)A = a(uA) + b(vA)$

$\underset{1\times n}{u}\,\underset{n\times n}{A} = 1\times n$

$(j1)A = j1i = ji1 = j((1)(A))$

Ορισμός

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ με τύπο $\varphi(u) = uA$. Η φ είναι γραμμική:

$= (au+bv)A = (au)A + (bv)A = a(uA) + b(vA) =$

$\varphi(au+bv) = (au+bv)A$

$a\varphi(u) + b\varphi(v)$

Προσοχή!

• Αν ορίσουμε τον πολλ/μο από δεξιά, η απεικόνιση να διπλασιάζεται μέσω του πίνακα A **δεν** είναι γραμμική.

• Έστω η γραμμική απεικόνιση $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ να έχει πίνακα τον A και η $\psi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ τον B.

Τότε, $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ έχει πίνακα τον AB.

$\varphi(u) \to uA \to \psi(\varphi(u)) \to uAB$

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση φ, θα καλείται ισομορφισμός αν υπάρχει μια ψ ώστε $\varphi \circ \psi$ και $\psi \circ \varphi$ να δίνουν την ταυτοτική απεικόνιση.

• Η ψ καλείται αντίστροφη της φ και ανάποδα.

Έστω A και B οι αντίστοιχοι πίνακες.

$\psi \circ \varphi = 1_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow AB = I$ μοναδιαίος ταυτοτικός πίνακας

Άρα ο B είναι ο αντίστροφος του A και γράφουμε $B = A^{-1}$

Ιδιότητες

Γνωρίζουμε ότι στο $M_n(\mathbb{K})$ ορίζεται και το γινόμενο των πινάκων για το οποίο ισχύει 1) $\exists I$ ο μοναδιαίος πίνακας ώστε $IA = AI = A$ $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$

2) $(A+B)C = AC + BC$ και $A(B+C) = AB + AC$

3) $(AB)C = A(BC)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο διανυσματικός χώρος $M_n(\mathbb{K})$ πάνω από το $\mathbb{K}$, με τις παραπάνω ιδιότητες θα καλείται προσεταιριστική άλγεβρα.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω G μια προσεταιριστική άλγεβρα και S' το υποσύνολό της το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία της τα οποία αντιστρέφονται. Τότε το S' είναι ομάδα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$S' = \{g \in G \text{ ώστε } \exists g^{-1}\}$

Αν $g, g' \in S' \Rightarrow g^{-1}, (g')^{-1} \in S'$

$gg' \in S' \Leftrightarrow (gg')^{-1} \in S'$

$(gg')(g')^{-1}g^{-1} = g(g'(g')^{-1})g^{-1} = g1g^{-1} = gg^{-1} = 1$

Άρα $(gg')^{-1} = (g')^{-1}g^{-1}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Με $GL_n(\mathbb{K})$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων από το $M_n(\mathbb{K})$.

Αυτό θα είναι ομάδα, από προηγούμενη ΠΡΟΤΑΣΗ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{R}^* \supseteq U$ ανοιχτό $\Leftrightarrow \exists U'$ ανοιχτό στον $\mathbb{R}$ ώστε $U = \mathbb{R}^* \cap U'$

$(-\infty, 0)$ ανοιχτό στον $\mathbb{R}$: $(-\infty, 0) = \mathbb{R}^* \cap (-\infty, 0)$.

$(-\infty, 0)^c = \mathbb{R}^* \setminus (-\infty, 0) = (0, +\infty)$ κλειστό.

$(0, +\infty)$ είναι και ανοιχτό στο $\mathbb{R}^*$ για τον λόγο που είναι το $(-\infty, 0)$.

Τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ είναι ανοιχτά και κλειστά στο $\mathbb{R}^*$ και μάλιστα $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \sqcup (0, +\infty)$

Άρα, ο $\mathbb{R}^*$ δεν είναι συνεκτικός

Το $\mathbb{R}^*$ είναι ομάδα, $GL_1(\mathbb{R})$

Το $\mathbb{R}^*$ είναι ένωση δύο συνεκτικές συνιστώσες

Το $\mathbb{R}^*$ αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες, $(0,+\infty) \subset \mathbb{R}^*$, περιέχει το

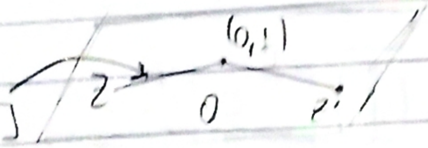
Η θετική συνιστώσα είναι υποομάδα

1, μοναδιαίο.

2) $GL_1(\mathbb{C}) = \{z$ ώστε $\exists z^{-1} \Leftrightarrow z \neq 0\}$ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Έστω $\mathbb{C}^*$ όχι συνεκτικό, τότε $\mathbb{C}^* = U \sqcup V$ ανοιχτά.

$z \in U$ και $z' \in V$



$a(0) = z$ $a(1) = z'$

Δεν γίνεται όμως να ενώσω τα σημεία. Να βρίσκεται δηλαδή και στην μία συνεκτική συνιστώσα και στην άλλη

Άρα $\mathbb{C}^*$ συνεκτικός

3) $GL_1(\mathbb{H}) = \{u \in \mathbb{H}$ ώστε $\exists u^{-1} \Leftrightarrow u \neq 0\}$

$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$

$\mathbb{H}^* \underset{\text{ομοιομορφ.}}{\simeq} \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ συνεκτικός

$\rightarrow (a,b,c,d)$: 4 μεταβλητές

4) $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, ad - bc \neq 0 \right\}$

$\subseteq M_2(\mathbb{R})$

↳ έχει διάσταση 4

notes
Γενικά στους πραγματικούς οι $n \times n$ πίνακες έχουν διάσταση n^2

Δηλαδή, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$

5) $GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \middle| \, z_i \in \mathbb{C}, \; z_1 z_4 - z_2 z_3 \neq 0 \right\}$

$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ πάνω από το } \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \\ 2 \cdot 4 \text{ πάνω από το } \mathbb{R} \end{array}\right\}$ διάσταση

6) $GL_2(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \middle| \, v_i \in \mathbb{H}, \; v_1 v_4 - v_2 v_3 \neq 0 \right\}$

$\det \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} = ij - ji = k - (-k) = 2k \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}$ ισομορφισμός

→ έπρεπε να είναι 0 καθώς είναι Γ.Ε.

Θεωρώ την γραμ. απεικ. $\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$

$(i, -i) \begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} = (i^2 - i^2, ij - ij) = (0, 0)$

Αλλά, όταν έχω ισομορφισμό μόνο το $(0,0) \to (0,0)$.
Επομένως, έχω πρόβλημα, δεν είναι ισομορφισμός και άρα η ορίζουσα δεν "λειτουργεί" όπως στα προηγούμενα.

Επομένως, $GL_2(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \middle| \, v_i \in \mathbb{H} \right.$, η αντίστοιχη γραμμ. απεικόνιση να είναι ισομορφισμός ή να $\exists$ ο αντίστροφος πίνακας $\}$

$M_1(\mathbb{H})$

ΟΡΙΣΜΟΣ (ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΤΟ $\mathbb{H}$)

Ορίζουμε την $\varphi : \mathbb{H} \xrightarrow{1-1} M_2(\mathbb{C})$

$\varphi(a + bi + cj + dk) = \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2) $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$
3) φ είναι 1-1.

} ΑΣΚΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΜΑ: Είναι γραμμική η φ; ΣΧΕΔΟΝ

$\varphi(uv) = u\varphi(v)$ $\nexists$ καθώς $u \in \mathbb{H}$ και εμείς θέλουμε μόνο $\mathbb{C}$!

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορίζουμε την $\varphi: M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$

$A=(v_{ij}) \mapsto \varphi(A) = (g(v_{i,j}))$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} \mapsto \varphi\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(v_1) & g(v_2) \\ g(v_3) & g(v_4) \end{pmatrix}$$

$v_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$
$v_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$
$v_3 = a_3 + b_3 i + c_3 j + d_3 k$
$v_4 = a_4 + b_4 i + c_4 j + d_4 k$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1+b_1 i & -c_1-d_1 i \\ c_1-d_1 i & a_1-b_1 i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_2+b_2 i & -c_2-d_2 i \\ c_2-d_2 i & a_2-b_2 i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_3+b_3 i & -c_3-d_3 i \\ c_3-d_3 i & a_3-b_3 i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_4+b_4 i & -c_4-d_4 i \\ c_4-d_4 i & a_4-b_4 i \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

4×4 πίνακας (μιγαδικός)

ΛΗΜΜΑ

$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$A=(v_{ij})$ $B=(u_{ij})$

$$AB = \sum_{t=1}^{n} (v_{it} u_{tj}) \to \varphi(AB) = \left(g \sum v_{it} u_{tj}\right) \overset{\text{ΙΔΙΟΤ}}{=}$$

$$\left(\sum_{t=1}^{n} g(v_{it} u_{tj})\right) \overset{\text{ΙΔΙΟΤ.}}{=} \left(\sum_{t=1}^{n} g(v_{it}) g(u_{tj})\right) (\text{I})$$

$\varphi(A) = (y(v_{i,j}))$

$\varphi(B) = (y(u_{i,j}))$

$\varphi(A)\varphi(B) = (y(v_{i,j}))(y(u_{i,j})) = \left(\sum_{t=1}^{n} y(v_{i,t})y(u_{t,j})\right)$ (II)

Άρα (I)=(II)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A \in Gl_n(\mathbb{H}) \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in Gl_n(\mathbb{H})$

$AA^{-1} = I_n \Rightarrow \varphi(A \cdot A^{-1}) = \varphi(I_n)$ (Οι πίνακες που έχουν γίνει μιγαδικοί πλέον, μέσω της φ)

$\varphi(A)\varphi(A^{-1}) = I_{2n} \Leftrightarrow (\varphi(A))^{-1} = \varphi(A^{-1})$

Γνωρίζουμε ότι ο φ(A) είναι μιγαδικός $2n \times 2n$ πίνακας.
Άρα φ(A) αντιστρέφεται $\Leftrightarrow \det\varphi(A) \neq 0$.

Επανάληψη

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{H} = \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

$M_n(\mathbb{K}) = \{n \times n$ πίνακες στο $\mathbb{K}\}$ δ.χ.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$A \cdot B \in M_n(\mathbb{K})$ = $\mathbb{K}$-άλγεβρα

$A(B+C) = AB+AC$ $(AB)C = A(BC)$ προσεταιριστική - μοναδιαία

$(A+B)C = AC+BC$

$1 \in M_n(\mathbb{K})$

$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$

$Gl_n(\mathbb{K}) = \{A \mid \exists A^{-1}\} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ (ομάδα)

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Για $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ η ορίζουσα ορίζεται διαφορετικά.